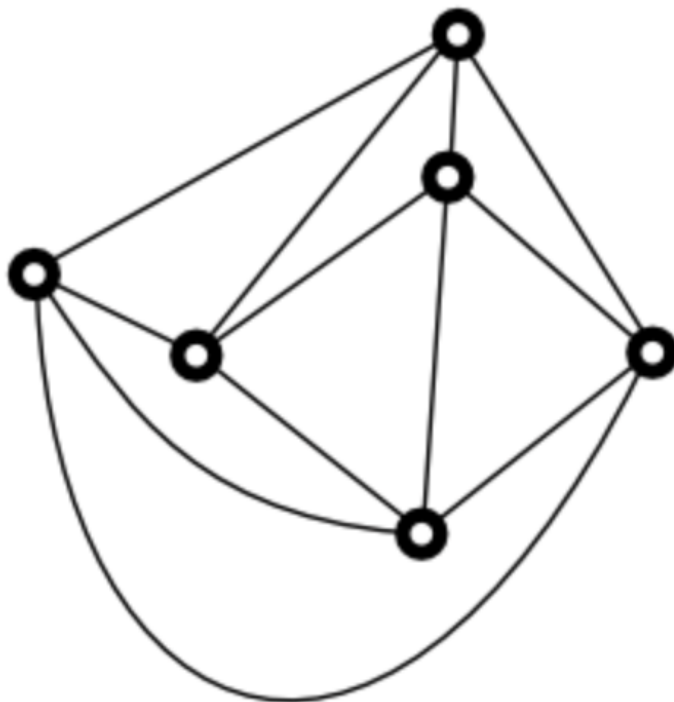


Планарный граф – граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений ребер не по вершинам. Какое-либо конкретное изображение планарного графа на плоскости называется **плоским графом**.

Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его *гранями*. Неограниченная часть плоскости – тоже грань, называется *внешней гранью*.

Простой граф (конечный граф без кратных ребер и петель) называется **максимально планарным**, если он плоский, но добавление любого ребра (на заданном наборе вершин) разрушило бы это свойство.



Каждая грань в максимально планарном графе имеет три вершины, поэтому максимально планарный граф называется **триангулированным** и имеет ровно три внешних ребра.

Формула Эйлера. Если планарный связный граф имеет v вершин, e – количество ребер, f – количество граней, то они связаны формулой $v - e + f = 2$.

Следствие из формулы Эйлера. Планарный граф с числом вершин $v \geq 3$ имеет не более $3v - 6$ ребер. Триангулированный граф с v вершинами имеет $3v - 6$ ребер.

Доказательство. Каждая грань графа ограничена не менее тремя ребрами, а каждое ребро является границей не более двух граней, тогда $3f \leq 2e$. Отсюда по формуле Эйлера следует:

$$2 = v - e + f \leq v - e + \frac{2}{3}e \Rightarrow e \leq 3v - 6.$$

Для максимальнопланарного графа выполняется равенство $3f = 2e$, аналогично из формулы Эйлера получаем $e = 3v - 6$ и $f = 2v - 4$.